



Kangourou Sans Frontières



Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika  
w Toruniu

Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy  
i Nauk Matematycznych

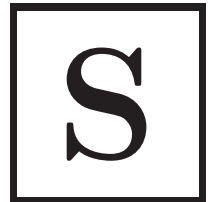
## Międzynarodowy Konkurs Matematyczny KANGUR 2015

### Student

Klasy II i III liceów oraz II, III i IV techników

Czas trwania konkursu: 75 minut

Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!



#### Pytania po 3 punkty

1. Agnieszka urodziła się w roku 1997, a jej młodsza siostra Karolina – w roku 2001. Można więc z całą pewnością powiedzieć, że różnią się wiekiem

- A) mniej niż o 4 lata.                      B) co najmniej o 4 lata.                      C) dokładnie o 4 lata.  
D) więcej niż o 4 lata.                      E) co najmniej o 3 lata.

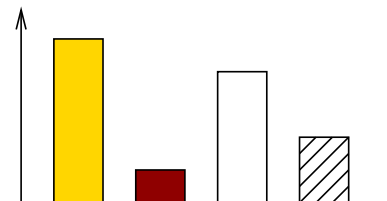
2.  $(a - b)^5 + (b - a)^5 =$

- A) 0                      B)  $2(a - b)^5$                       C)  $2a^5 - 2b^5$                       D)  $2a^5 + 2b^5$   
E)  $2a^5 + 10a^4b + 20a^3b^2 + 20a^2b^3 + 10ab^4 + 2b^5$

3. Ile rozwiązań ma równanie  $2^{2x} = 4^{x+1}$  ?

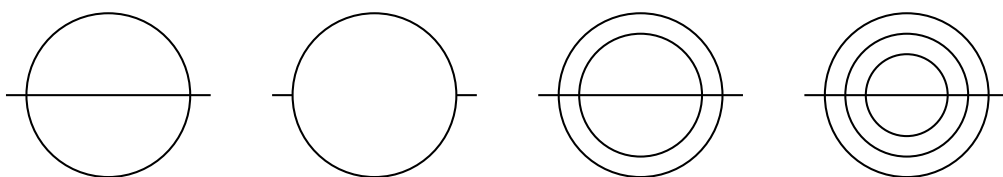
- A) 0                      B) Nieskończenie wiele                      C) 2                      D) 1                      E) 3

4. W czasie wycieczki edukacyjnej do parku uczniowie zbierali dane o liczbie drzew czterech wybranych gatunków. Danka narysowała wykres słupkowy reprezentujący zebrane dane (patrz rysunek). Janek przedstawił te same dane na diagramie kołowym. Który z następujących diagramów jest diagramem Janka?



- A)      B)      C)      D)      E)

5. Ile z czterech poniższych figur można narysować bez odrywania ołówka od kartki i prowadzenia go dwa razy po tej samej linii?



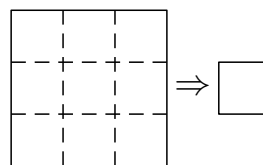
- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 4

6. Piotr dodał do siebie 31 kolejnych liczb naturalnych od 2001 do 2031, a następnie otrzymaną sumę podzielił przez 31. Jaki wynik otrzymał?

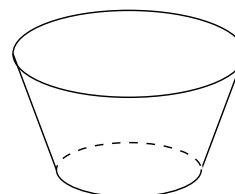
- A) 2012                      B) 2013                      C) 2015                      D) 2016                      E) 2496

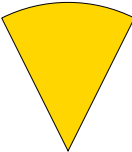
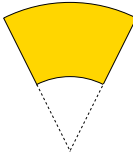


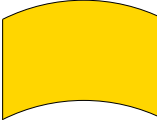
7. Kwadratową kartkę papieru zagięto wzdłuż przerywanych linii w pewnej kolejności (patrz rysunek) i odcięto jeden z rogów powstałego kwadratu. Ile jest dziur w tej kartce po jej rozłożeniu (nie liczymy ubytków na brzegu)?

- A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 4                      E) 9



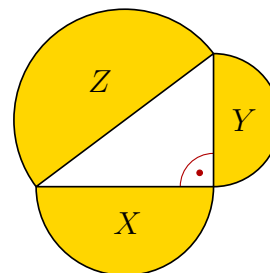
8. Donica ma kształt stożka ściętego (patrz rysunek). Powierzchnię boczną donicy (a więc donicę bez podstawy) należy pokryć kawałkiem papieru, tak aby nie powstały luki ani zakładki. Jaki powinien być kształt użytego kawałka papieru?



- A)                       B)                       C)                       D)                       E) 

9. Średnice trzech półkolel tworzą boki trójkąta prostokątnego, a ich pola są równe odpowiednio  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  (patrz rysunek). Która z zależności musi wówczas zachodzić?

- A)  $X + Y < Z$                       B)  $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$                       C)  $X + Y = Z$   
D)  $X^2 + Y^2 = Z^2$                       E)  $X^2 + Y^2 = Z$



10. Niech  $n$  oznacza liczbę kątów wewnętrznych w czworokącie wypukłym, które są kątami ostrymi. Lista wszystkich możliwych wartości  $n$  to

- A) 0, 1, 2.                      B) 0, 1, 2, 3.                      C) 0, 1, 2, 3, 4.                      D) 0, 1, 3.                      E) 1, 2, 3.

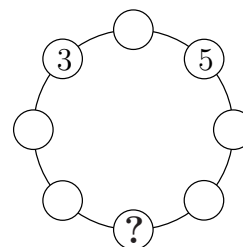
### Pytania po 4 punkty

11.  $\sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \cdot 2015) + (2015 : 2015)} =$

- A)  $\sqrt{2015}$                       B) 2015                      C) 2016                      D) 2017                      E) 4030

12. Ela chce w każde kółko diagramu obok wpisać pewną liczbę, tak aby każda liczba była sumą dwóch sąsiednich liczb. Jaką liczbę musi wpisać w kółko ze znakiem zapytania?

- A) -5    B) -16    C) -8    D) -3    E) Taka liczba nie istnieje.



13. Danych jest pięć różnych dodatnich liczb całkowitych  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , przy czym wiadomo, że  $c : e = b$ ,  $a + b = d$  i  $e - d = a$ . Która z liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  jest największa?

- A)  $a$                       B)  $b$                       C)  $c$                       D)  $d$                       E)  $e$

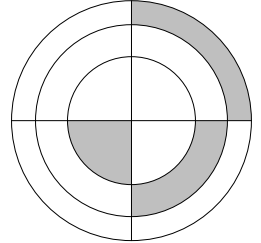
14. Na ile obszarów dzieli płaszczyznę oś  $OX$  i wykresy funkcji  $f(x) = 2 - x^2$  oraz  $g(x) = x^2 - 1$ ?

- A) 6                      B) 8                      C) 10                      D) 12                      E) 14

15. Średnią geometryczną  $n$  liczb dodatnich nazywamy pierwiastek  $n$ -tego stopnia z iloczynu tych liczb. Średnia geometryczna pewnych trzech liczb jest równa 3, a średnia geometryczna innych trzech liczb wynosi 12. Jaka jest średnia geometryczna tych sześciu liczb?

- A) 4                      B) 6                      C)  $\frac{15}{2}$                       D)  $\frac{15}{6}$                       E) 36

16. Na diagramie przedstawiono 3 okręgi współśrodkowe i dwie wzajemnie prostopadłe średnice okręgu o największym promieniu. Ile jest równy iloczyn promieni tych trzech okręgów, jeśli trzy zacieniowane figury mają równe pola, a promień najmniejszego okręgu jest równy jeden?



- A)  $\sqrt{6}$                       B) 3                      C)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$                       D)  $2\sqrt{2}$                       E) 6

17. Sprzedawca samochodów nabył dwa samochody, a następnie odsprzedał je swoim klientom. Pierwszy samochód sprzedał za cenę o 40% wyższą od ceny zakupu, a drugi samochód sprzedał za cenę o 60% wyższą od ceny jego zakupu. W sumie za oba samochody zainkasował o 54% więcej, niż wydał na ich zakup. Jaki jest stosunek ceny, za jaką sprzedawca nabył pierwszy samochód, do ceny, za jaką nabył drugi samochód?

- A) 10 : 13                      B) 20 : 27                      C) 3 : 7                      D) 7 : 12                      E) 2 : 3

18. Na diagramie obok przedstawiono schematycznie tabliczkę mnożenia od 1 do 10. Ile jest równa suma wszystkich 100 iloczynów w pełnej tabeli?

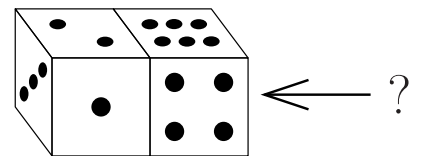
$\times$	1	2	3	...	10
1	1	2	3	...	10
2	2	4	6	...	20
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	10	20	30	...	100

- A) 1000                      B) 2025                      C) 2500                      D) 3025                      E) 5500

19. Niech  $\overline{xy}$  oznacza zapis liczby dwucyfrowej o cyfrach  $x$  i  $y$ . Na ile sposobów można wybrać różne cyfry  $a, b, c$ , tak aby  $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ ?

- A) 84                      B) 96                      C) 125                      D) 201                      E) 502

20. Na standardowej kostce do gry suma oczek na każdych dwóch przeciwległych ścianach jest równa 7. Rysunek przedstawia dwie identyczne standardowe kostki do gry. Ile oczek może być na niewidocznej ścianie z prawej strony oznaczonej znakiem zapytania?



- A) Tylko 5.                      B) Tylko 2.                      C) 2 lub 5.                      D) 1, 2, 3 lub 5.                      E) 2,3 lub 5.

### Pytania po 5 punktów

21. W pudełku jest 2015 koralików ponumerowanych liczbami od 1 do 2015. Koraliki z równą sumą wypisanych na nich cyfr mają ten sam kolor, a koraliki z różnymi sumami mają różne kolory. Ile jest różnych kolorów koralików w pudełku?

- A) 10                      B) 27                      C) 28                      D) 29                      E) 2015

22. Które z poniższych zdań jest pierwszym zdaniem prawdziwym, jeśli zdania czytamy w kolejności od 1. do 5.?

1. Zdanie 3. jest prawdziwe.                      2. Zdanie 1. jest prawdziwe.                      3. Zdanie 5. jest fałszywe.  
4. Zdanie 2. jest fałszywe.                      5.  $1 + 1 = 2$ .

- A) 1.                      B) 2.                      C) 3.                      D) 4.                      E) 5.

23. Na ile sposobów można pokolorować krawędzie sześcianu  $ABCDEFGH$  czterema danymi kolorami, jeśli na każdej ścianie mają być krawędzie we wszystkich czterech kolorach?

- A)  $2 \cdot 24$                       B)  $3 \cdot 24$                       C)  $6 \cdot 24$                       D)  $4^6$                       E)  $4^{12}$

24. Ile jest wielokątów foremnych, w których miara kąta wewnętrznego (w stopniach) jest liczbą całkowitą?

- A) 17                      B) 18                      C) 22                      D) 25                      E) 60

25. Ile trzycyfrowych liczb naturalnych jest sumą dokładnie 9 różnych liczb całkowitych, z których każda jest potęgą liczby 2 (dopuszczamy potęgę  $2^0$ )?

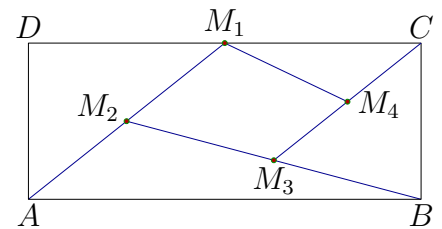
- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 5

26. Ile jest trójkątów  $ABC$ , w których  $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$ ,  $|AB| = 20$  i długości wszystkich boków są liczbami naturalnymi?

- A) 1                      B) 2                      C) 3                      D) 4                      E) 6

27. W prostokącie  $ABCD$  pokazanym na rysunku obok punkt  $M_1$  jest środkiem  $CD$ ,  $M_2$  jest środkiem  $AM_1$ ,  $M_3$  jest środkiem  $BM_2$  i  $M_4$  jest środkiem  $CM_3$ . Jaki jest stosunek pola czworokąta  $M_1M_2M_3M_4$  do pola prostokąta  $ABCD$ ?

- A)  $\frac{7}{16}$                       B)  $\frac{3}{16}$                       C)  $\frac{7}{32}$                       D)  $\frac{9}{32}$                       E)  $\frac{1}{5}$



28. Na tablicy znajduje się pewna liczba niebieskich i czerwonych prostokątów. Dokładnie 7 prostokątów jest kwadratami. Czerwonych prostokątów jest o 3 więcej niż niebieskich kwadratów, natomiast czerwonych kwadratów jest o 2 więcej niż niebieskich prostokątów. Ile niebieskich prostokątów znajduje się na tablicy?

- A) 1                      B) 3                      C) 5                      D) 6                      E) 10

29. Skupiający 96 członków klub miłośników liczenia wybrał prezesa według następującej procedury. Wszyscy członkowie ustawili się w koło i zaczęli odliczać po kolei 1, 2, 3 itd. Każdy wypowiadający liczbę parzystą natychmiast opuszczał koło. Po zakończeniu pierwszej tury odbyła się druga i kolejne, przy czym zachowywano ciągłość odliczania, tzn. pierwszy w drugiej turze wypowiedział liczbę 97 itd. Odliczanie kontynuowano, aż w kole pozostała tylko jedna osoba, która została prezesem. Jaką liczbę wypowiedział prezes w pierwszej turze?

- A) 1                      B) 17                      C) 33                      D) 65                      E) 95

30. Protazy i Gerwazy – każdy na swój sposób – zamienili litery słowa KANGAROO cyframi, otrzymując ośmiocyfrowe liczby podzielne przez 11. Każdy z nich zastąpił różne litery różnymi cyframi, a takie same litery – równymi cyframi. Gerwazy otrzymał największą możliwą liczbę, a Protazy – najmniejszą. Okazało się, że obaj zastąpili pewną literę tą samą cyfrą. Jaka to cyfra?

- A) 0                      B) 3                      C) 4                      D) 5                      E) 6