Kangourou Sans Frontières
Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy i Nauk Matematycznych

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Polskie Towarzystwo Matematyczne

Międzynarodowy Konkurs Matematyczny
KANGUR 2017

Junior

J

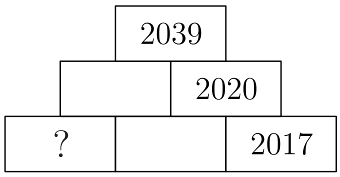
Klasy III gimnazjów i I liceów

Czas trwania konkursu: 75 minut

Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!

Pytania po 3 punkty

1. W puste pola diagramu wpisujemy liczby w taki sposób, że każda liczba (oprócz liczb z dolnego wiersza) jest sumą dwóch sąsiadujących z nią liczb poniżej. Jaka liczba znajdzie się w polu oznaczonym znakiem zapytania?

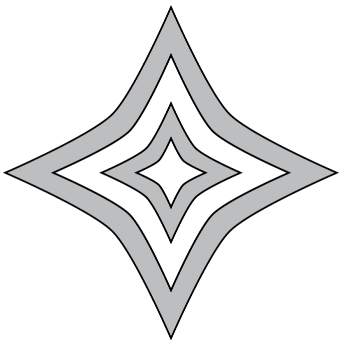


A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

2. Na przeźroczystym kawałku szyby Piotr napisał słowo **KANGUR** (patrz rysunek obok). Co zobaczy Piotr, jeśli odwróci ten kawałek szyby na drugą stronę wzdłuż poziomej krawędzi?

A)  B)  C)  D)  E) 

3. Ania ułożyła dekorację z szarych i białych kartek papieru w kształcie czteroramiennych gwiazd (patrz rysunek). Pola tych gwiazd są równe: 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 i 16 cm^2. Ile jest równe pole widocznego szarego obszaru?

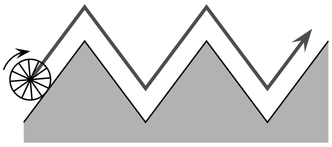
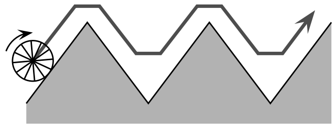
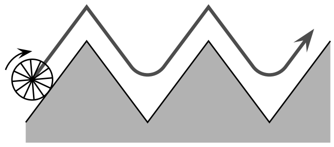


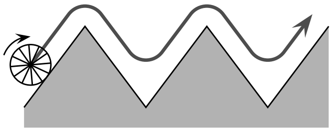
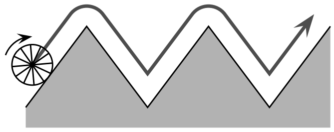
A) 9 cm^2 B) 10 cm^2 C) 11 cm^2 D) 12 cm^2 E) 13 cm^2

4. Marysia ma 24 złote, a każda z jej trzech sióstr ma po 12 złotych. Po ile złotych powinna dać Marysia każdej ze swoich sióstr, aby wszystkie cztery dziewczęta miały po tyle samo złotych?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

5. Którą z krzywych zakreśli środek koła toczącego się po zygzakowatej linii?

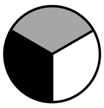
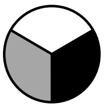
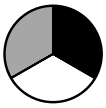
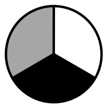
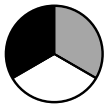
A)  B)  C) 

D)  E) 

6. Dziewczęta trzymając się za ręce tańczą w kręgu. Alicja jest piąta na lewo od Beaty i ósma na prawo od niej. Ile dziewcząt tańczy w tym kręgu?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

7. Koło o promieniu 1 toczy się po linii prostej od punktu K do punktu L, gdzie $|KL| = 11\pi$ (patrz rysunek). Jakie jest położenie tego koła w punkcie L?

A)  B)  C)  D)  E) 

8. W tym sezonie szachista Marcin rozegrał już 15 partii, z których 9 wygrał. Pozostało mu do rozegrania jeszcze 5 partii. Jaki będzie procent wygranych przez niego partii w tym sezonie, jeżeli wygra wszystkie pozostałe?

A) 60% B) 65% C) 70% D) 75% E) 80%

9. W wyspiarskim państwie Abacja jedna ósma wszystkich podatników nie płaci podatku dochodowego. Trzy siódme płacących podatek dochodowy płaci go w pełnej wysokości, a pozostali odliczają ulgę. Jaką część wszystkich podatników stanowią podatnicy odliczający ulgę?

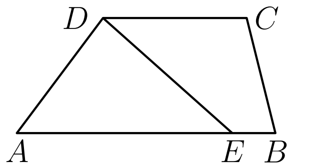
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

10. Nauczyciel ma pudełko z żetonami w trzech kolorach. Znajdują się w nim 203 czerwone żetony, 117 białych i 28 niebieskich. Uczniowie kolejno wyjmują po jednym żetonie bez oglądania jakiego jest koloru. Co najmniej ile żetonów trzeba wyjąć, aby mieć pewność, że wśród wyjętych żetonów są 3 tego samego koloru?

A) 3 B) 6 C) 7 D) 203 E) 321

Pytania po 4 punkty

11. W trapezie $ABCD$ boki AB i CD są do siebie równoległe i $|AB| = 50$, zaś $|CD| = 20$. Na boku AB wybrano taki punkt E, że odcinek DE dzieli ten trapez na dwie części o równych polach. Jaka jest długość odcinka AE?

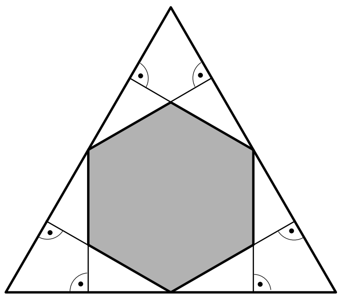


A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

12. Ile jest takich liczb naturalnych a, że dokładnie jedna z liczb: a albo $a + 20$ jest liczbą czterocyfrową?

A) 19 B) 20 C) 38 D) 39 E) 40

13. Środek każdego z boków trójkąta równobocznego zrzutowano prostopadle na pozostałe dwa jego boki. Boki zacieniowanego sześciokąta zawierają się w odcinkach łączących te środki z ich rzutami (patrz rysunek). Jaką część pola trójkąta stanowi pole zacieniowanego sześciokąta?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

14. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich jest równa 770. Ile jest równa największa z tych trzech liczb?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

15. Na ścianach sześciennej kostki widnieją liczby: -3, -2, -1, 0, 1, 2. Rzucamy dwukrotnie tą kostką, a wynik zapisujemy w postaci pary (a,b), gdzie a jest liczbą wyrzuconą w pierwszym rzucie, a b liczbą wyrzuconą w drugim rzucie. Ile różnych par (a,b), takich że iloczyn ab jest ujemny, możemy otrzymać?

A) 18 B) 9 C) 11 D) 13 E) 12

16. Tymoteusz układa sobie plan treningów biegowych, który musi spełniać następujące trzy warunki: treningi nie odbywają się dzień po dniu, odbywają się w te same dni tygodnia i w każdym tygodniu są 3 treningi. Na ile sposobów można ułożyć taki plan?

A) 6 B) 7 C) 9 D) 10 E) 30

17. Każdy z czterech braci jest innego wzrostu. Rafał jest o tyle centymetrów niższy od Stasia, o ile jest wyższy od Pawła. O tę samą liczbę centymetrów Olek jest niższy od Pawła. Rafał ma 184 cm wzrostu, a średnia arytmetyczna wzrostu wszystkich braci wynosi 178 cm. Ile centymetrów wzrostu ma Olek?

A) 160 B) 166 C) 172 D) 184 E) 190

18. W czasie wakacji padało 7 razy, zawsze albo rano, albo po południu. Jeśli padało rano, to po południu nie padało. Jeśli padało po południu, to tego dnia rano nie padało. W czasie wakacji było 5 bezdeszczowych poranków i 6 bezdeszczowych popołudni. Co najmniej ile dni trwały te wakacje?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

19. W puste pola tablicy 3×3 (patrz rysunek) wpisujemy liczby tak, że sumy liczb stojących w każdym z czterech kwadratów 2×2 tej tablicy są sobie równe. Jaką liczbę musimy wpisać w narożne pole oznaczone znakiem zapytania?

3		**1**
2		**?**

A) 5 B) 4 C) 1 D) 0 E) Liczby tej nie można wyznaczyć.

20. Tworzymy kody o siedmiu znakach, w których każdy znak jest cyfrą. Jeśli cyfra występuje w kodzie, to liczba jej wystąpień jest równa tej cyfrze, a identyczne cyfry wypisywane są zawsze obok siebie. Przykładami takich kodów są: 4444333, 1666666. Ile różnych takich kodów można utworzyć?

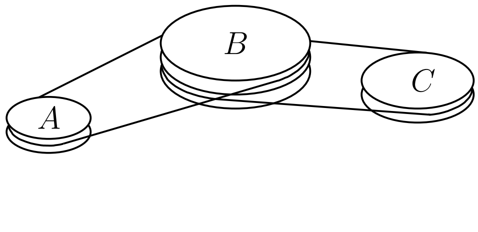
A) 6 B) 7 C) 10 D) 12 E) 13

Pytania po 5 punktów

21. Każdy z czterech chłopców ma mniej niż 18 lat i każdy z nich jest w innym wieku. Iloczyn liczb lat tych chłopców jest równy 882. Ile jest równa suma lat tych chłopców?

A) 23 B) 25 C) 27 D) 31 E) 33

22. Pracującą bez poślizgu przekładnię pasową tworzą 3 koła: A, B i C (patrz rysunek). Koło B wykonuje 4 pełne obroty, gdy koło A wykonuje 5 pełnych obrotów i wykonuje 6 pełnych obrotów, gdy koło C wykonuje 7 pełnych obrotów. Ile jest równy obwód koła A, jeśli obwód koła C jest równy 30 cm?



A) 27 cm B) 28 cm C) 29 cm D) 30 cm E) 31 cm

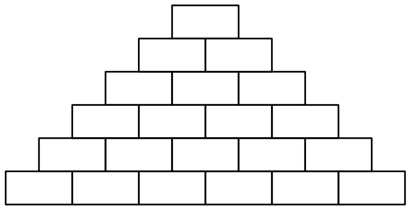
23. Liczba dwucyfrowa ma zapis dziesiętny $\overline{ab}$ (a i b to cyfry). Przez którą z poniższych liczb na pewno podzielna jest liczba sześciocyfrowa $\overline{ababab}$?

A) 2 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

24. Wypisano jedna za drugą siedem niekoniecznie różnych liczb: a, b, c, d, e, f, g. Suma tych wszystkich liczb jest równa 2017, a sąsiednie liczby różnią się o 1. Która z tych liczb może być równa 286?

A) Tylko a lub g. B) Tylko b lub f. C) Tylko c lub e. D) Tylko d. E) Każda z nich.

25. Piotr wpisuje w pola diagramu przedstawionego obok liczby naturalne zgodnie z zasadą, że każda liczba (z wyjątkiem liczb z dolnego wiersza) jest sumą dwóch sąsiadujących z nią liczb poniżej. Co najwyżej ile liczb nieparzystych Piotr może wpisać w ten diagram?



A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

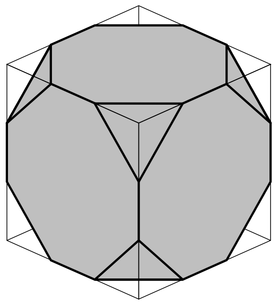
26. Agnieszka obliczyła sumę kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego. W swoich rachunkach pominęła jeden z kątów i otrzymała wynik 2017°. Jaką miarę miał kąt, który Agnieszka pominęła w rachunkach?

A) 37° B) 53° C) 97° D) 127° E) 143°

27. Trzydzieści tancerek ustawiło się w kręgu twarzami skierowanymi do jego środka. Na hasło „Zwrot!" niektóre z tancerek obróciły się w lewo, a wszystkie pozostałe w prawo. Tancerki, które stanęły twarzą w twarz, powiedziały „Cześć". Okazało się, że takich tancerek było 10. Następnie na hasło „Półobrót!" wszystkie tancerki wykonały pół obrotu i znów te, które stanęły twarzą w twarz, powiedziały „Cześć". Ile tancerek powiedziało „Cześć" tym razem?

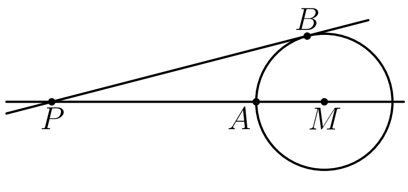
A) 10 B) 20 C) 8 D) 15 E) Nie można tego ustalić.

28. Od sześcianu o krawędzi długości 3 odcinamy każdy z jego narożników, tnąc każdorazowo wzdłuż płaszczyzny przechodzącej przez punkty leżące na krawędziach wychodzących z wierzchołka narożnika w odległości 1 od niego (patrz rysunek). Ile jest równy stosunek objętości otrzymanego w ten sposób wielościanu do objętości sześcianu, z którego on powstał?



A) $\frac{8}{9}$ B) $\frac{23}{27}$ C) $\frac{26}{27}$ D) $\frac{77}{81}$ E) $\frac{74}{81}$

29. Punkty A i B leżą na okręgu o środku punkcie M. Prosta PB jest styczna do tego okręgu w punkcie B. Co więcej, długości $|PA|$ i $|MB|$ są liczbami całkowitymi, a $|PB| = |PA| + 6$. Co najwyżej ile wartości może przyjmować $|MB|$?



A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

30. Każdą z czterystu ram rowerowych schodzących kolejno z taśmy produkcyjnej chcemy pomalować na jeden z trzech kolorów: żółty, czerwony albo czarny. Ze względów technologicznych malowanie musimy przeprowadzić w trzech seriach, przy czym pierwszą serię wyprodukowanych ram musimy pomalować na żółto, drugą na czerwono, a trzecią na czarno. Każda z serii musi liczyć przynajmniej 100 ram, ale nie więcej niż 200. Na ile sposobów możemy zaplanować takie serie?

A) $50 \cdot 101$ B) $51 \cdot 101$ C) 101^2 D) 101^3 E) $51^2 \cdot 101$