Kangourou Sans Frontières
Towarzystwo Upowszechniania Wiedzy i Nauk Matematycznych
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Polskie Towarzystwo Matematyczne

Międzynarodowy Konkurs Matematyczny

KANGUR 2017

Student

S

Klasy II i III liceów oraz II, III i IV techników

Czas trwania konkursu: 75 minut

Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!

Pytania po 3 punkty

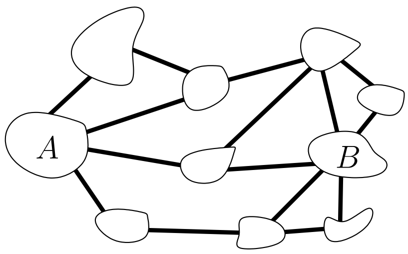
1. $\dfrac{20 \cdot 17}{2+0+1+7} =$

A) 3,4 B) 17 C) 34 D) 201,7 E) 340

2. Bartek jest zapalonym modelarzem. Jego ulubionym modelem jest model kolejki elektrycznej w skali 1 : 87 zwany przez modelarzy H0. Wykonał do niego wiele dodatkowych figurek, w tym dwucentymetrową figurkę swojego brata, oczywiście wszystkie w skali modelu. Jaki jest rzeczywisty wzrost jego brata?

A) 1,74 m B) 1,62 m C) 1,86 m D) 1,94 m E) 1,70 m

3. Rysunek przedstawia 10 wysp połączonych 15 mostami. Jaka jest najmniejsza liczba mostów, które należy usunąć, aby uniemożliwić przedostanie się z wyspy A na wyspę B?

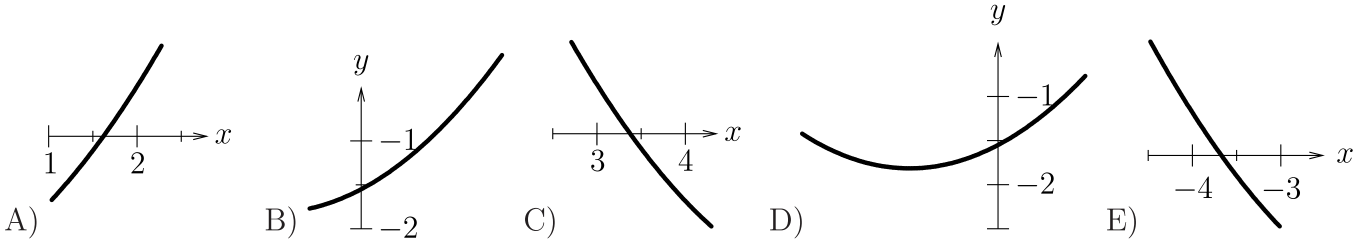


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

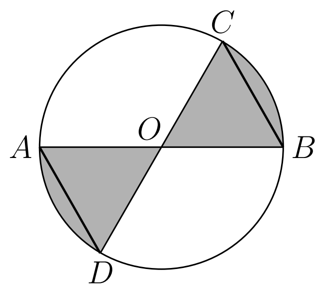
4. Liczby a i b są dodatnie, przy czym 75% liczby a jest równe 40% liczby b. Oznacza to, że

A) $15a = 8b$. B) $7a = 8b$. C) $3a = 2b$. D) $5a = 12b$. E) $8a = 15b$.

5. Na czterech z pięciu poniższych ilustracji przedstawione są fragmenty wykresu tej samej funkcji kwadratowej. Która z ilustracji nie przedstawia fragmentu tego wykresu?

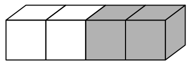


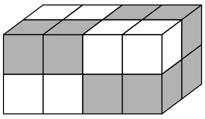
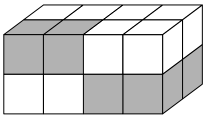
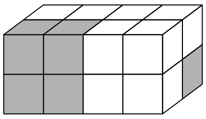
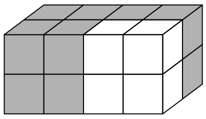
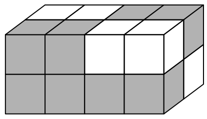
6. W kole o środku O poprowadzono średnice AB i CD, takie że $|OB| = |BC|$ (patrz rysunek). Jaką część pola koła stanowi pole zacieniowanego obszaru?



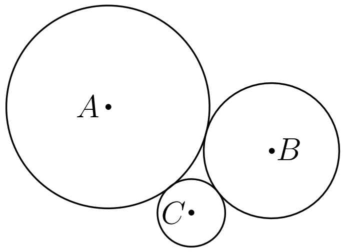
A) $\dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{2}{7}$ D) $\dfrac{3}{8}$ E) $\dfrac{4}{11}$

7. Klocek rozmiarów $4 \times 1 \times 1$ powstał ze sklejenia 2 białych sześcianów i dwóch szarych tak jak na rysunku. Jedna z poniższych budowli została zbudowana z takich klocków. Która?



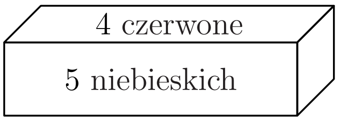
A)  B)  C)  D)  E) 

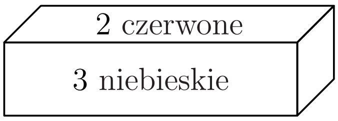
8. Trzy wzajemnie styczne okręgi o środkach w punktach A, B i C mają odpowiednio promienie 3, 2 i 1 (patrz rysunek). Ile jest równe pole trójkąta ABC?

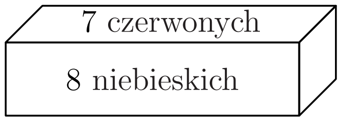


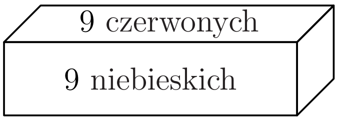
A) 6 B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 9 E) $2\sqrt{6}$

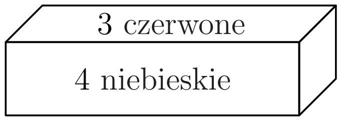
9. Każde z przedstawionych pudełek zawiera pewną liczbę kulek czerwonych i niebieskich zgodnie z oznaczeniami na pudełkach. Bartek musi wylosować jedną kulkę z dowolnego pudełka. Z którego pudełka powinien losować, aby mieć jak największą szansę wylosowania niebieskiej kulki?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

10. Wykres której z następujących funkcji ma najwięcej punktów wspólnych z wykresem funkcji $f(x) = x$?

A) $g_1(x) = x^2$ B) $g_2(x) = x^3$ C) $g_3(x) = x^4$ D) $g_4(x) = -x^4$ E) $g_5(x) = -x$

Pytania po 4 punkty

11. Suma długości wszystkich boków pewnego trójkąta prostokątnego jest równa 18, a suma kwadratów długości wszystkich jego boków jest równa 128. Ile jest równe pole tego trójkąta?

A) 18 B) 16 C) 12 D) 10 E) 9

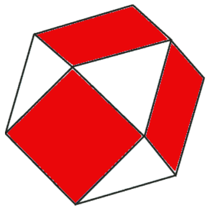
12. Liczba p jest dodatnia i mniejsza od 1, a liczba q jest większa od 1. Która z poniższych liczb jest największa?

A) p^2q B) pq^2 C) p^2q^2 D) $(\sqrt{p} + q)^2$ E) $(p^2 + q)^2$

13. Walce A i B mają taką samą objętość. Promień podstawy walca B jest o 10% większy od promienia podstawy walca A. Wysokość walca A jest dłuższa od wysokości walca B o

A) 5%. B) 10%. C) 11%. D) 20%. E) 21%.

14. Rysunek przedstawia wielościan, w którym każda ściana jest albo trójkątem, albo kwadratem. Każda krawędź jest wspólnym bokiem jednego kwadratu i jednego trójkąta. Ile ścian trójkątnych ma ten wielościan, jeśli ma on 6 ścian kwadratowych?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

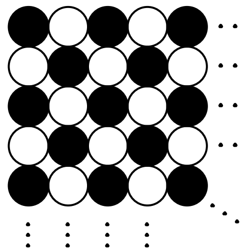
15. Kuba napisał w każdym z czterech rogów tablicy liczbę 2017. Teraz z każdej z liczb musi wymazać jedną cyfrę, ale tak, aby z czterech spośród dwunastu pozostałych na tablicy cyfr można było ułożyć liczbę 2017. Na ile sposobów może wymazać cyfry?

A) 255 B) 252 C) 232 D) 175 E) 24

16. Która z poniższych liczb nie może być pierwiastkiem wielomianu postaci $5x^3 + ax^2 + bx + 24$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi?

A) 1 B) -1 C) 3 D) 5 E) 6

17. Julia ma 2017 koralików, wśród których 1009 jest czarnych, a pozostałe są białe. Układa z nich kwadratowe wzory, w których czarne i białe koraliki przeplatają się tak w wierszach jak i w kolumnach, a koralik w lewym górnym rogu jest czarny (patrz rysunek). Ile koralików każdego koloru jej pozostanie, gdy ułoży największy możliwy taki wzór?

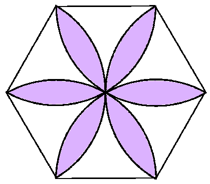


A) Żaden. B) Po 40 każdego koloru.
C) 40 czarnych i 41 białych. D) Po 41 każdego koloru.
E) 40 białych i 41 czarnych.

18. Suma cyfr każdej z pewnych dwóch kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 7. Co najmniej ile cyfr ma mniejsza z tych liczb?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

19. W sześciokąt foremny o boku długości 1 wpisano przypominającą kwiat figurę powstałą z odcinków kół o promieniu 1 i o środkach w wierzchołkach sześciokąta (patrz rysunek). Ile wynosi pole powierzchni tej figury?



A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $2\sqrt{3} - \pi$ D) $\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}$ E) $2\pi - 3\sqrt{3}$

20. Wynalazca Klapaucjusz skonstruował robota obdarzonego sztuczną inteligencją. Niestety w wyniku błędu w programie w każdych trzech kolejnych wypowiadanych przez niego zdaniach jest dokładnie jedno fałszywe. Robot poproszony o podanie własności pewnej liczby dwucyfrowej powiedział w kolejności: „Jedną z jej cyfr jest 2”, „Jest większa niż 50”, „Jest parzysta”, „Jest mniejsza niż 30”, „Jest podzielna przez 3”, „Jedną z jej cyfr jest 7”. Ile jest równa suma cyfr tej liczby?

A) 9 B) 12 C) 13 D) 15 E) 17

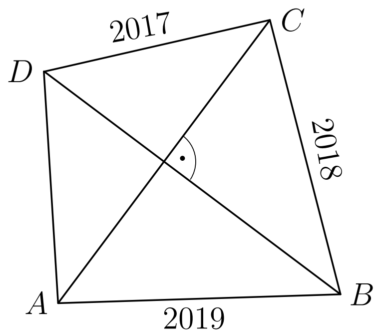
Pytania po 5 punktów

21. Ile dodatnich liczb całkowitych ma tę własność, że liczba powstała przez wykreślenie z niej cyfry jedności jest równa jednej czternastej liczby początkowej?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

22. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne są prostopadłe. Jeśli $|AB| = 2019$, $|BC| = 2018$ i $|CD| = 2017$, to długość AD wynosi

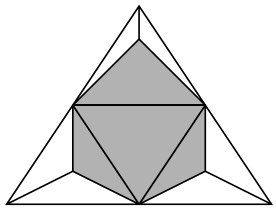
A) 2016. B) 2018. C) $\sqrt{2020^2 - 4}$. D) $\sqrt{2018^2 + 2}$. E) 2020.



23. Rozważmy ciąg o wyrazach a_n, $n \geqslant 1$, w którym $a_1 = 2017$ i $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$. Wówczas $a_{2017} =$

A) -2017. B) $\dfrac{-1}{2016}$. C) $\dfrac{2016}{2017}$. D) 1. E) 2017.

24. Z czworościanu foremnego odcinamy rogi przy pomocy czterech płaszczyzn, z których każda przechodzi przez środki 3 krawędzi stykających się w jednym wierzchołku (patrz rysunek). Jaką część objętości czworościanu stanowi objętość otrzymanej bryły?



A) $\dfrac{4}{5}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{3}$

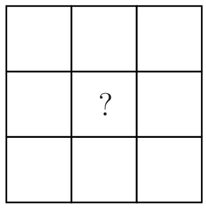
25. Karolina wybiera 10 różnych liczb dodatnich, a następnie niektóre z nich mnoży przez 2, inne przez 3, a wszystkie pozostałe przez 4. Jaka jest najmniejsza liczba różnych wyników, jakie może w ten sposób otrzymać?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

26. Długości wszystkich boków trójkąta prostokątnego są liczbami naturalnymi. Jaki jest obwód tego trójkąta, jeśli jedna z przyprostokątnych ma długość 29?

A) 290 B) 291 C) 869 D) 870 E) Nie można tego określić.

27. W pola diagramu rozmiaru 3×3 (patrz rysunek) wpisano 9 liczb całkowitych. Suma wpisanych liczb wynosi 500. Wiadomo, że liczby w polach sąsiednich, to jest w polach stykających się wzdłuż wspólnego boku, różnią się o 1. Jaka liczba została wpisana w pole środkowe?



A) 50 B) 54 C) 55 D) 56 E) 57

28. Jeśli $|x| + x + y = 5$ i $x + |y| - y = 10$, to suma $x + y$ jest równa

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4. E) 5.

29. Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych $\overline{abc}$, dla których $(a+b)^c$ jest trzycyfrową potęgą liczby 2?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

30. Na pewnej wyspie żyje 2017 mieszkańców. Każdy z nich jest albo kłamcą (który kłamie za każdym razem), albo osobą prawdomówną (która zawsze mówi prawdę). Pewnego dnia więcej niż 1000 mieszkańców wyspy spotkało się na bankiecie przy okrągłym stole. Każdy z nich wypowiedział zdanie „Spośród dwóch ludzi siedzących obok mnie jeden jest kłamcą, a drugi prawdomównym”. Co najwyżej ilu prawdomównych mieszka na wyspie?

A) 1683 B) 668 C) 670 D) 1344 E) 1343