

Międzynarodowy Konkurs Matematyczny

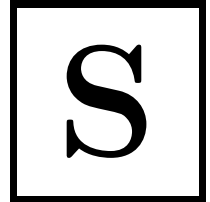
KANGUR 2021

Student

Klasy II i III liceów 3-letnich
oraz II, III i IV techników 4-letnich

Czas trwania konkursu: 75 minut

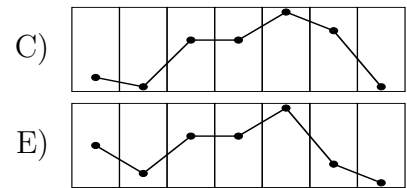
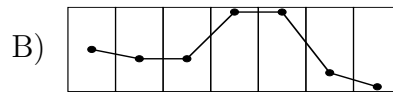
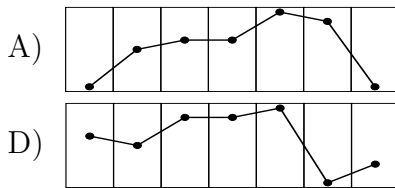
Podczas konkursu nie wolno używać kalkulatorów!



Pytania po 3 punkty

1. Paulina zainstalowała aplikację pokazującą m.in. prognozowaną temperaturę maksymalną. Rysunek pokazuje prognozę na najbliższy tydzień. Który z poniższych wykresów prawidłowo pokazuje prognozowaną temperaturę?

Pt.	Sob.	Niedz.	Pon.	Wt.	Śr.	Czw.
-1°C	-4°C	0°C	0°C	3°C	-3°C	-5°C



2. Ile liczb całkowitych leży w przedziale $(20 - \sqrt{21}, 20 + \sqrt{21})$?

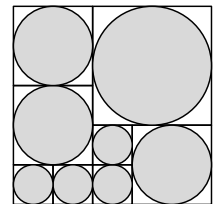
- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

3. Sześcian o krawędzi 1 rozcięto na dwa identyczne prostopadłościany. Pole powierzchni każdego z tych prostopadłościanów jest równe

- A) $\frac{3}{2}$. B) 2. C) 3. D) 4. E) 5.

4. Duży kwadrat podzielono na mniejsze kwadraty jak na rysunku. Zacięniowane koła są wpisane w odpowiednie kwadraty. Jaką częścią pola dużego kwadratu jest pole zacięniowanego obszaru?

- A) $\frac{8\pi}{9}$ B) $\frac{13\pi}{16}$ C) $\frac{3}{\pi}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$



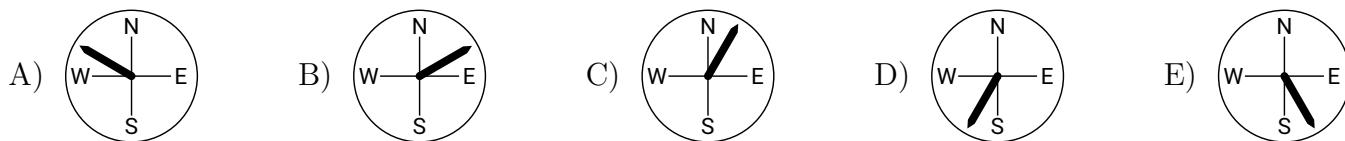
5. Kwadratowa podłoga była wyłożona dużymi, kwadratowymi płytami o jednakowych rozmiarach i bokach równoległych do krawędzi podłogi. W czasie remontu wymieniono wszystkie płyty leżące na obu przekątnych. Okazało się, że było to w sumie 9 płyt. Ile płyt pozostało niewymienionych?

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

6. Prostokątna kartka papieru ma długość x i szerokość y , przy czym $x > y$. Przez zetknięcie dwóch przeciwległych brzegów tej kartki możemy uformować powierzchnię boczną walca na dwa różne sposoby. Jaki jest stosunek objętości wyższego z tych walców do objętości niższego?

- A) $y^2 : x^2$ B) $y : x$ C) 1 : 1 D) $x : y$ E) $x^2 : y^2$

7. Po nocnej burzy maszt flagowy przed szkołą przechylił się. Gdy patrzymy na maszt od wschodu lub od północnego zachodu, to widać, że czubek masztu wychylił się względem podstawy w prawo. Który z rysunków pokazuje wychylenie masztu?



8. Niech $x = \frac{\pi}{4}$. Która z poniższych liczb jest największa?

- A) x^4 B) x^2 C) x D) \sqrt{x} E) $\sqrt[4]{x}$

9. Ile spośród liczb trzycyfrowych utworzonych jedynie z cyfr 1, 3 i 5 (każdej cyfry można używać wielokrotnie) jest podzielnych przez 3?

- A) 3 B) 6 C) 9 D) 18 E) 27

10. Czemu jest równe pole trójkąta o wierzchołkach (p, q) , $(3p, q)$ i $(2p, 3q)$, gdzie $p, q > 0$?

- A) $\frac{pq}{2}$ B) pq C) $2pq$ D) $3pq$ E) $4pq$

Pytania po 4 punkty

11. Jeżeli jednym z miejsc zerowych funkcji $y = ax^2 + bx + c$ jest liczba 2, to jednym z miejsc zerowych funkcji $y = cx^2 + bx + a$ jest liczba

- A) -2 . B) 0. C) 1. D) -1 . E) 0,5.

12. Jaką część wszystkich dzielników liczby $7!$ stanowią liczby nieparzyste?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

13. Niech $A = (0, 1) \cup (2, 3)$ i niech $B = (1, 2) \cup (3, 4)$. Zbiorem wszystkich liczb postaci $a + b$, gdzie a należy do zbioru A i b należy do B , jest

- A) $(1, 7)$. B) $(1, 5) \cup (5, 7)$. C) $(1, 3) \cup (3, 7)$. D) $(1, 3) \cup (3, 5) \cup (5, 7)$. E) inny zbiór.

14. Ile liczb trzycyfrowych ma tę własność, że odwracając kolejność cyfr, otrzymujemy liczbę większą o 99?

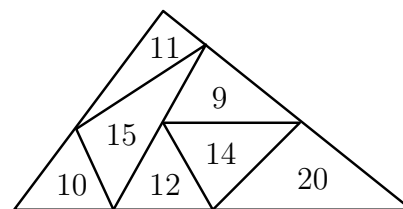
- A) 8 B) 64 C) 72 D) 80 E) 81

15. Na tablicy zapisano liczby 1, 2, 7, 9, 10, 15 i 19. Dwaj gracze usuwają na zmianę po jednej liczbie, aż na tablicy pozostanie tylko jedna liczba. Jaka liczba pozostanie na tablicy, jeśli suma liczb usuniętych przez jednego gracza będzie dwukrotnie większa od sumy liczb usuniętych przez drugiego gracza?

- A) 7 B) 9 C) 10 D) 15 E) 19

16. Duży trójkąt podzielono na mniejsze trójkąty jak na rysunku. Liczby w małych trójkątach oznaczają ich obwody. Jaki jest obwód dużego trójkąta?

- A) 45 B) 33 C) 23 D) 41 E) Inna odpowiedź.



17. Dla całkowitej liczby dodatniej N symbolem $p(N)$ oznaczmy iloczyn cyfr liczby N . Na przykład $p(23) = 2 \cdot 3 = 6$. Suma $p(10) + p(11) + p(12) + \dots + p(99) + p(100)$ jest równa

- A) 2025. B) 4500. C) 5005. D) 5050. E) innej liczbie.

18. Wszystkie pola diagramu na rysunku tak wypełniono liczbami, by sumy w wierszach i kolumnach były jednakowe, a następnie zakryto niektóre liczby. Jaka liczba znajduje się w polu oznaczonym znakiem zapytania?

	16		22	
20		21		2
	25		1	
24		5		6
	4		?	

A) 8 B) 10 C) 12 D) 18 E) 23

19. Suma liczb trzycyfrowych 916 i $\overline{3x3}$ jest liczbą czterocyfrową $\overline{12y9}$, przy czym $\overline{12y9}$ jest podzielne przez 9 . Ile wynosi $x + y$?

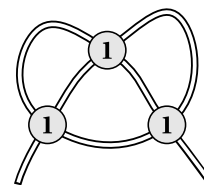
A) 11 B) 9 C) 8 D) 12 E) 15

20. Adam ma kostkę sera w kształcie sześcianu o krawędzi 10 cm. Chciałby go tak pociąć nożem na mniejsze kawałki, aby ser zmieścił się w prostopadłościennym pojemniku z pokrywką o wewnętrznych wymiarach 11 cm \times 18 cm \times 7 cm (geometrycznie każde cięcie jest cięciem płaszczyzną). Jaka jest najmniejsza możliwa liczba kawałków, na które Adam powinien pociąć ser?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Pytania po 5 punktów

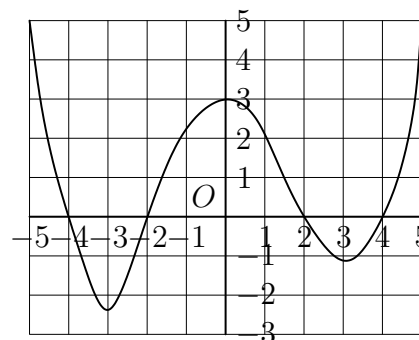
21. Na stole leży kawałek sznurka przykryty częściowo trzema monetami jak pokazano na rysunku. Pod każdą z monet z jednakowym prawdopodobieństwem sznurek wygląda tak \times lub tak \times . Jakie jest prawdopodobieństwo, że po pociągnięciu końcówek na sznurku powstanie węzeł?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{8}$

22. Na rysunku pokazano wykres funkcji f określonej na przedziale $[-5, 5]$. Ile różnych rozwiązań ma równanie $f(f(x)) = 0$?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8



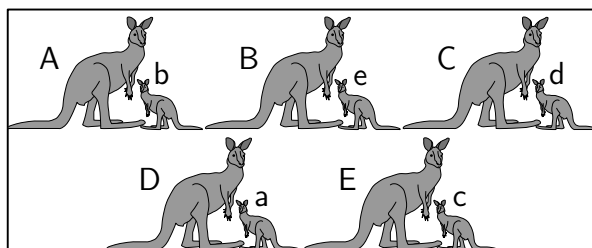
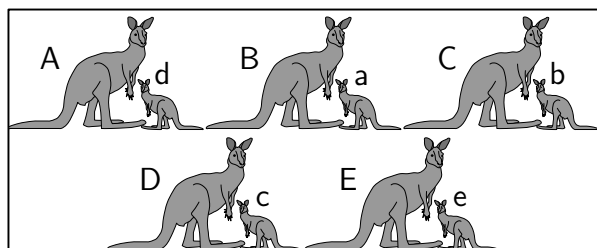
23. Liczby całkowite od 1 do 1000 wypisujemy w pewnej kolejności w rzędzie jedna za drugą i obliczamy wszystkie sumy trzech kolejnych z tych liczb. Co najwyżej ile spośród wszystkich tych sum jest liczbami nieparzystymi?

A) 997 B) 996 C) 995 D) 994 E) 993

24. Dla funkcji f określonej na liczbach naturalnych zachodzi $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ dla wszystkich x i y oraz $f(1) = 2$. Jaka liczba jest sumą $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \dots + \frac{f(2021)}{f(2020)}$?

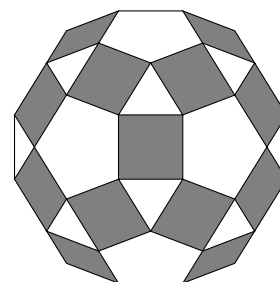
A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 2020 E) Inną liczbą.

25. Każda z pięciu kangurzyce oznaczonych literami A, B, C, D i E ma po jednym dziecku. Kangurzątko oznaczone są literami a, b, c, d oraz e. Na pierwszej fotografii dokładnie dwójka dzieci stoi przy swoich matkach, a na drugiej — dokładnie trójka. Czym dzieckiem jest a?



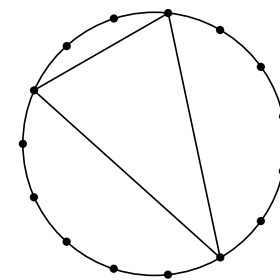
- A) A B) B C) C D) D E) E

26. Na rysunku pokazano bryłę, której dwanaście ścian jest pięciokątami foremnymi, a każda z pozostałych ścian jest albo kwadratem, albo trójkątem równobocznym. Każda ściana pięciokątna jest otoczona przez pięć ścian kwadratowych, a każda ściana trójkątna jest otoczona przez trzy ściany kwadratowe. Janek zapisał liczbę 5 na każdej ścianie pięciokątnej, liczbę -1 na każdej ścianie kwadratowej i liczbę 1 na każdej ścianie trójkątnej. Ile wynosi suma liczb zapisanych na wszystkich ścianach?



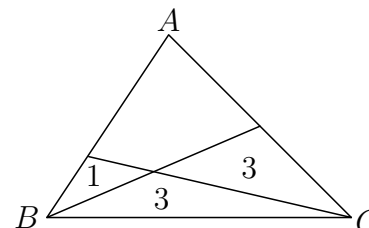
- A) 20 B) 50 C) 60 D) 80 E) 120

27. Na okręgu zaznaczono wierzchołki piętnastokąta foremnego. Tworzymy trójkąty, łącząc odcinkami dowolne trzy z zaznaczonych punktów. Mówimy, że dwa takie trójkąty mają taki sam kształt, gdy są przystające. Trójkąty ilu różnych kształtów można w ten sposób utworzyć?



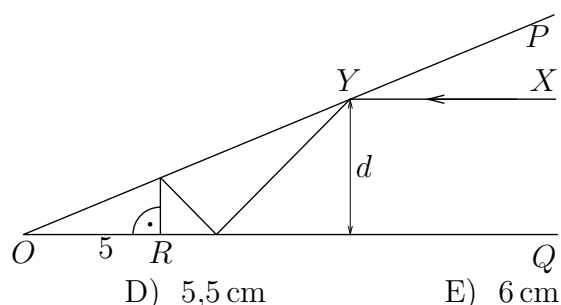
- A) 19 B) 91 C) 46 D) 455 E) 23

28. W trójkącie ABC połączono odcinkami wierzchołki B i C z przeciwległymi bokami, otrzymując małe trójkąty o polach 3, 3 i 1 (patrz rysunek). Czemu jest równe pole trójkąta ABC ?



- A) 12 B) 12,5 C) 13 D) 13,5 E) 14

29. Płaskie zwierciadła OP i OQ nachylone są względem siebie pod kątem ostrym. Równoległy do OQ promień świetlny XY odbija się od OP w punkcie Y , po czym odbija się od OQ , raz jeszcze odbija się od OP i uderza pod kątem prostym w OQ w punkcie R odległym od O o 5 cm. Jaka jest odległość d promienia XY od zwierciadła OQ ?



- A) 4 cm B) 4,5 cm C) 5 cm D) 5,5 cm E) 6 cm

30. Dla liczby rzeczywistej k niech $M(k)$ oznacza największą wartość wyrażenia $|4x^2 - 4x + k|$ dla x z przedziału domkniętego $\langle -1, 1 \rangle$. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość $M(k)$?

- A) 4 B) $9/2$ C) 5 D) $11/2$ E) 8